$$\frac{d}{d\varepsilon|0} \int_a^b \left|\frac{\partial}{\partial t} \Psi(t,\varepsilon)\right| dt =$$

$$\frac{d}{d\varepsilon|0} \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial t} \Psi(t,\varepsilon) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t,\varepsilon)\right]^{1/2} dt =$$

$$\int_a^b \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \quad \dot{c}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon|0}\left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi(t,\varepsilon)\right) dt =$$

$$\int_a^b \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \quad \dot{c}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon|0} \Psi(t,\varepsilon)\right) dt =$$

$$\int_a^b \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \quad \dot{c}(t) \cdot \dot{V}(t)\, dt = \int_a^b \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \quad \dot{c}(t) \cdot \frac{DV(t)}{dt}\, dt,$$

denn $\dot{c} \in V_c$, so dass $\dot{c} \cdot \dot{V} = \dot{c} \cdot \frac{DV}{dt}$.

Ist c proportional zur Bogenlänge parametrisiert,

also $|\dot{c}| \equiv \text{const} > 0$ und gilt $V(a) = V(b) = 0$,

so folgt :

$$\int_a^b |\dot{c}|^{-1} \quad \dot{c}(t) \cdot \frac{DV}{dt}(t)\, dt =$$

$$|\dot{c}|^{-1} \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\dot{c}(t) \cdot V(t)\right) dt -$$

$$|\dot c|^{-1} \int_a^b V(t) \cdot \frac{D\dot c}{dt}(t)\, dt =$$

$$-|\dot c|^{-1} \int_a^b V(t) \cdot \frac{D\dot c}{dt}(t)\, dt =: \delta L(c, V).$$

Angenommen $L(c) \leq L(\tilde c)$ für alle $\tilde c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\tilde c = X \circ \tilde\omega$, mit $\tilde c(a) = c(a)$, $\tilde c(b) = c(b)$. Ist <u>c proportional zur Bogenlänge parametrisiert</u> und $V \in \mathcal{V}_c$ mit $V(a) = V(b) = 0$, so erfüllen die Kurven $\Upsilon(t, \varepsilon) := X(\omega(t) + \varepsilon \tilde V(t))$, $\tilde V(t) := (DX_{\omega(t)})^{-1}(V(t))$, $\Upsilon(a, \varepsilon) = c(a)$, $\Upsilon(b, \varepsilon) = c(b)$, so dass $L(c) \leq L(\Upsilon(\cdot, \varepsilon))$, mithin

$$\delta L(c, V) = 0$$

für alle V wie oben; es folgt die bekannte Gleichung

$$(2) \qquad \frac{D\dot c}{dt} \equiv 0,$$

<u>die Kurve c ist eine Geodätische.</u> Somit ergibt

sich die Gleichung (2) für Geodätische als Euler-Gleichung des Längenfunktionals, wenn man sich auf Kurven beschränkt, die proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind. Umgekehrt kann man zeigen, dass Geodätische zumindest lokal die Länge minimieren. Allerdings muss eine Geodätische nicht die kürzeste Verbindung auf der Fläche X zwischen ihrem Anfangs- und Endpunkt sein! (Teile von Großkreisen liefern Beispiele.)

Beispiele für Geodätische:

1.) Wir betrachten die Ebene $X : (u,v) \mapsto (u,v,0)$, also die Fläche $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Nach den Gauß'schen Darstellungsformeln gilt wegen $X_{uu} = X_{uv} = X_{vv} = 0$

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \{1,2\}$, so daß sich die Gleichungen (3) für eine Geodätische $c = X \circ \omega$ reduzieren auf $\frac{d^2}{dt^2}\omega_\gamma = 0$,

$\nu = 1,2$. Also ist $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ und damit natürlich

auch $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $c = X \circ \omega$, affin linear.

2.) Geodätische auf dem Zylinder:

Sei Z der senkrechte Kreiszylinder über dem Kreis

$x^2 + y^2 = 1$.

a) Jeder Kreis auf Z, den man als Schnitt mit einer Ebene parallel zur xy - Ebene erhält, ist eine Geodätische auf Z.

Beweis: Ist $c(s)$ Parametrisierung eines solchen Kreises nach der Bogenlänge, o.E. $c(s) = (u(s), v(s), 0)$,

so ist $\ddot{c}$ parallel zur Normalen an Z in $c(s)$,

aus der Darstellung $\ddot{c} = \kappa_g (N \times \dot{c}) + \kappa_n N$

folgt $\kappa_g = 0$.

b) Um weitere Geodätische zu finden, wählen wir die Parametrisierung $X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $X(u_1,u_2) := (\cos u_1, \sin u_1, u_2)$,

und beachten, dass X eine lokale Isometrie ist, vgl. § 1,

die die Ebene auf Z abbildet. Es gilt:

Unter lokalen Isometrien werden Geodätische auf Geodätische abgebildet.

Denn: Isometrien erhalten die Erste Fundamentalform und damit die Christoffel-Symbole, und nur diese gehen in die Gleichung (3) für Geodätische ein!

Also ergeben die X-Bilder von Geraden in der Ebene offenbar die Geodätischen auf Z.

Sei $p = X(0,0) = (1,0,0)$. Dann ist nach dem gerade Gesagten jede Geodätische auf Z durch p das X-Bild von Geraden $\omega(s) = s(a,b)$ in $\mathbb{R}^2$ durch $(0,0)$, $a^2+b^2=1$.

$a = 0$: $\quad X(\omega(s)) = (1, 0, \pm s)$

senkrechte Gerade durch p

$b = 0$: $\quad X(\omega(s)) = (\cos s, \pm \sin s, 0)$

Kreislinie (vgl. a))

$a \neq 0 \neq b$: $\quad X(\omega(s)) = (\cos(a s), \sin(a s), b s)$

Helix durch p

3.) Geodätische auf S^2:

Unter einem Großkreis auf S^2 versteht man den Schnitt von S^2 mit einer Ebene durch den Ursprung. Wie in 2.)a) überlegt man sich, dass für Großkreise $\varkappa_g \equiv 0$ gilt, diese also Geodätische auf S^2 sind. Sei $p \in S^2$ und $c: I \to S^2$ eine Geodätische. Dann wird genau ein Großkreis $\tilde{c}$ dadurch festgelegt, dass er durch p gehen soll und dort $\dot{c}(0)$ als Tangentenvektor hat. Nach der

Eindeutigkeitsaussage für Geodätische folgt dann Spur $c \subset$ Spur $\tilde{c}$.

<u>Satz 7</u> (<u>lokale Existenz und Eindeutigkeit von Geodätischen</u>)

Es sei $X : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $S = X(\Omega)$. Ist $p \in S$ und $W_0 \in T_p S$ mit $W_0 \neq 0$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Geodätische $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist, mit $c(0) = p$ und $c'(0) = W_0 / |W_0|$.

Beweis: Es gelte $X^{-1}(p) = \tilde{p} \in \mathbb{R}^2$ sowie

$$w_0 := \left(DX_{\tilde{p}}\right)^{-1} \left(W_0/|W_0|\right).$$

Dann löst man das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\omega)\, \dot{\omega}_\alpha \dot{\omega}_\beta = 0 , & \gamma = 1,2 , \\ \omega(0) = \tilde{p} , \quad \dot{\omega}(0) = w_0 & , \end{cases}$$

was nach Sätzen über Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf einem passenden Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ möglich ist. $c(s) := X(\omega(s))$ ist dann die gesuchte Geodätische. Die Eindeutigkeit folgt ebenfalls aus der Theorie der gew. Dglen. $\square$

Kommen wir zum Schluss zurück zum Begriff des parallelen Vektorfeldes. Ist $X: \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Ebene, etwa $X(u,v) = (u,v,0)$, und $c: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve darin, so sind alle Vektorfelder $V(t)$ mit $V_3(t) \equiv 0$ tangential zu c. Offenbar ist $\frac{DV}{dt}(t) = \frac{d}{dt} V(t)$, denn $\frac{d}{dt} V(t) \in T_{c(t)} X = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Parallelität von V längs c heißt $\dot{V}(t) \equiv 0$, m.a.W.: Ist c eine ebene Kurve, so sind die zu c parallelen Vektorfelder genau die konstanten Vektorfelder (in der entsprechenden Ebene).

Satz 8: Es sei $c = X \circ \omega$ mit einer Kurve $\omega : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Ist $W_0 \in T_{c(t_0)}X$ mit einem $t_0 \in [a,b]$ fixiert, so gibt es genau ein paralleles Vektorfeld $W \in V_c$ mit $W(t_0) = W_0$.

Beweis: Man löst das lineare System

$$\dot{W}_\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\omega) W_\gamma \dot{\omega}_\beta \equiv 0, \quad \gamma = 1,2,$$

zur entsprechenden Anfangsbedingung und setzt

$$W(t) = W_\gamma(t) X_{,\gamma}(\omega(t)).$$

$\square$

Man nennt W die Parallelverschiebung längs c von W_0.